DIOS NO JUEGA A LOS DADOS

Reflexiones sobre el azar

Carlos Domingo

Publicación original: 2002

edicionesdeldomo.altervista.org
Barcelona 2015

Contenido

Resumen

Se discuten algunos aspectos de la vieja polémica entre los que admiten un determinismo estricto para los procesos del universo y los que suponen la existencia objetiva del azar. Se revisan puntos de vista de la Filosofía, la Teoría de Probabilidades, la Física, la Biología, la Psicología y de algunas visiones del mundo. Se destaca la relación del problema con el carácter objetivista de nuestra ciencia. Se arguye que hay problemas donde ambas posiciones no son satisfactorias, concluyendo que azar y determinismo son dos modelos que se aplican, de acuerdo con el problema, a una realidad que no es idéntica a ninguno de ellos. Los estudios sobre caos muestran que puede haber variantes de estos modelos. Los de la subjetividad prometen otras soluciones.

1. Azar y Verdad

En mis clases de Estadística Elemental, al tratar de explicar que es un experimento aleatorio, acudo al clásico experimento del dado: arrojo un dado, sale un seis, al volverlo a arrojar el mismo dado, en la misma forma, sale un cuatro. Esto es un fenómeno aleatorio: al repetirlo en las mismas condiciones el resultado es diferente. Pero nunca falta la observación de algún alumno: "los dos lanzamientos son diferentes. Si se arrojara en condiciones exactamente iguales se obtendría el mismo resultado". Si nadie lo dice pregunto como se explica tal resultado lo cual provoca esa respuesta.

Insisto. ¿Que piensan ustedes? si se reproducen condiciones idénticas lo que ocurre ¿será lo mismo? Nadie parece dudarlo. Esta posición, llamada determinismo, parece ser la más universal. El azar es sólo subjetivo. Es causado por nuestra ignorancia. Si pudiéramos conocer todas las condiciones y las leyes de cambio el futuro es perfectamente predecible. (Laplace).

La dificultad comienza si pregunto porque me han contestado así. Una respuesta: "es porque creemos que es correcto, que es verdad". Si nadie dice esto se lo sugiero y todos lo aceptan como justificación de su respuesta.

Les digo entonces que no es esa la causa de la respuesta. En las circunstancias en que fue hecha la pregunta, aplicando la propia tesis de que todo está estrictamente de terminado por lo sucedido antes, la respuesta que me han dado no podría ser diferente. No parece tener mucho sentido decir que es verdadera. No podría ser otra.

¿Que pasaría si los alumnos admitieran que ocurren hechos realmente aleatorios? Es decir si hubieran contestado: "Al reproducirse iguales las condiciones lo que ocurre puede ser diferente". Es decir existe el azar como algo objetivo. Entonces, podría ocurrir, que si repito la pregunta primera pregunta con todas las condiciones iguales podrían contestar: "Al reproducirse las condiciones lo que ocurre no puede ser diferente". Pero entonces tampoco tendría sentido decir que la respuesta es verdadera, pues depende de un puro azar. En cualquier repetición de la pregunta en las mismas condiciones, es decir sin agregar nueva información no hay garantía de la misma respuesta. En resumen, si hay azar objetivo o determinismo estricto no se ve claro que quiere decir que una respuesta es correcta. La respuesta sería un hecho, no una verdad. Para que sintamos que es una verdad (es decir una concordancia entre la afirmación y los hechos a los que se refiere) debe haber la posibilidad de elegir la respuesta entre dos o más alternativas y además debe haber un proceso por el cual justificamos la elección. Si afirmo que 2+2=4 es verdad no es porque no pueda dar otra respuesta. En efecto puedo afirmar 2+2=5. Pero un matemático basado en los axiomas y definiciones de la Aritmética (dados por Peano) me puede demostrar que la primera es correcta y que la segunda es falsa.

La cuestión se ha complicado, Afirmar que hay azar objetivo o negarlo hace que carezca de sentido pensar que una proposición sea o no verdadera. La verdad debe fundamentarse en un proceso subjetivo (mental o perceptivo) que nos lleva a elegir si la damos por falsa o verdadera. El que toma la decisión piensa que su elección no puede estar regida por una necesidad que nos fija el resultado ni por un puro azar. Es claro que no siempre se puede decidir pero por lo menos se dan condiciones para que sea verdadera o falsa. En el ejemplo de la suma esas condiciones son los axiomas, definiciones y reglas de deducción de las Matemáticas.

2. Azar y libertad

Lo anterior plantea el antiguo tema del libre albedrío, es decir, de si nuestras decisiones son determinísticas o si son aleatorias o por lo menos tienen un componente aleatorio que las hace impredecibles. El determinismo hace todo lo que ocurre dependiente del pasado y de las leyes inflexibles de la naturaleza. No pueden ser cambiadas. Niega por lo tanto el libre albedrío. Las aseveraciones opuestas sobre el tema se hallan en los primeros filósofos atomistas griegos. Para ellos todo lo existente: piedras, animales, cuerpos humanos, almas, dioses, son configuraciones de átomos en el espacio vacío. Pero al discutir como se han formado hay dos opiniones. Para Demócrito (-460 -370) el movimiento natural de los átomos es la caída (en una dirección). Los átomos sólo interactúan por choque. Como los más pesados, caen más rápido chocan a los más lentos y se producen desvíos, torbellinos, uniones (por ganchos e irregularidades que tienen los átomos) formándose todo lo existente. Los movimientos de los átomos son estrictamente determinísticos, de modo que no hay nada aleatorio. La sensación de libre albedrío es sólo una ilusión. Por supuesto nadie es responsable de sus actos. No podría actuar de otra manera. Para Epicuro (-342 -270) no hay determinismo estricto. Las ideas de Epicuro fueron difundidas por el gran poeta romano Lucrecio (-97 -54) en su famoso poema De la Naturaleza de las Cosas. En él explica, sin intervención de los dioses, la formación y evolución del mundo físico, orgánico y social. Según Epicuro el proceso que describe Demócrito sería imposible pues en el vacío, no resistente, todas las cosas, aunque sean movidas por diferente peso se deben mover con igual velocidad (II-238). Por lo tanto los átomos deben tener desviaciones en su caída, que no pudiendo ser causadas por choque ni por un mecanismo interno (pues los átomos son simples)

sólo pueden deberse al azar, es decir no tienen causa, son impredecibles. Estas desviaciones casuales producen los choques, torbellinos y formación de objetos.
Y este fenómeno atómico es el fundamento de la libertad humana. "En fin -dice Lucrecio- si todo movimiento se conexiona y se origina siempre uno nuevo de otro anterior en determinado orden, y si los elementos no ocasionan, desviándose, cierto principio de movimiento que infrinja la ley del hado para que no siga de una causa a otra desde lo infinito, ¿de dónde viene esa libre potestad de los seres animados sobre la tierra?" II 252-60.

El argumento es sorprendente. Hace pensar que su anticipación a lo descubierto por Galileo sobre la caída de los cuerpos, es introducida para refutar el determinismo de Demócrito y asegurar la libre voluntad. El ser humano queda libre no sólo de los caprichos de los dioses (que para Lucrecio existen pero para nada intervienen en el mundo ya que todo lo explica por causas físicas) sino también de la tiranía del destino. Y eran los dioses y hado las principales preocupaciones y temores trascendentes de los greco-romanos. La especulación de Bohr de que la no determinación estricta de los procesos mentales puede deberse a que en ellos los procesos energéticos están en la zona cuántica y tales procesos son aleatorios, no es muy lejana a la epicúrea.

De todos modos, ya sea que nuestro mundo subjetivo esté regido por un determinismo estricto o un azar inexplicable no nos hace sentir libres. La sensación subjetiva de libertad no puede basarse en ninguna de las dos alternativas. Es un sentimiento subjetivo de que las decisiones que tomamos nacen de un mecanismo interno que percibe múltiples posibilidades de escogencia y elige una por un proceso de fundamentación subjetivo.

Como en el caso de la verdad de una afirmación, la libertad está relacionada con un proceso que no es ni determinístico ni es aleatorio.

En la discusión sobre el libre albedrío se han dado muchas vueltas alrededor del problema. Resumiendo. Hay un determinismo lógico que dice que, en un momento dado las afirmaciones posibles del futuro son verdaderas o falsas. Si hubiera libre albedrío, éste con su acción actual, podría cambiar ese carácter. Podría hacer verdadera la futura que es falsa, lo cual es absurdo. El determinismo teológico supone un Dios que sabe todo y por lo tanto todo lo que sucederá. Quiere decir que eso está determinado. Otros filósofos dividen el mundo en hechos físicos en los que gobierna el determinismo y mentales en los que existe libertad. Se basa en la afirmación de que existen entes mentales como las sensaciones (qualia) irreductibles al análisis de la ciencia objetivista. Otros suponen que la realidad es única pero tiene dos aspectos uno objetivo, material, y otro subjetivo, mental, estrechamente relacionados en las sensaciones y la acción. Otros como Epicuro han apelado al indeterminismo en la Física para fundamentar la el indeterminismo en los procesos cerebrales.

No discutiremos aquí este debate que continúa en el presente entre filósofos, teólogos, neurólogos y científicos cognitivos que explotan la analogía de la mente y el computador. Nos basta recordar que el problema del libre albedrío no está resuelto.

3. Azar y Probabilidad (medida del azar)

Cuando no queremos o no podemos determinar la ocurrencia de una entre alternativas de los resultados de un proceso decimos que es aleatorio y a veces a los diferentes resultados se le puede asignar una probabilidad de ocurrencia. Esto permite manejar matemáticamente los procesos aleatorios. La forma actual de la Teoría de la Probabilidad, creación única del pensamiento europeo renacentista, muestra que esta posibilidad de asignar un valor a la posibilidad de la ocurrencia de un hecho no es siempre realizable. Hay hechos sin probabilidad. La asignación de probabilidad puede hacerse sin ningún experimento o por muchas repeticiones del proceso. Cuando el número de posibles resultados (casos posibles) es finito y queremos saber la probabilidad de que sean de un cierto tipo (casos favorables) se ha propuesto (Cardano 1560) asignarle a estos como número que mide su probabilidad el cociente:

p=número de casos favorables/número total de casos posibles siempre que, por consideraciones de simetría, parecido o información podamos ver que todos los posibles tienen la misma posibilidad. Es decir, no hay más razón de que uno aparezca más que el otro. Si un dado es perfectamente regular hay seis posibilidades iguales de que salga uno de los números. La probabilidad, por ejemplo de que salga un número par (es decir 2, 4 o 6) es 3/6=0.5; puesto que hay 6 casos posibles y sólo 3 son favorables al evento de que sea par.

Si el experimento puede repetirse muchas veces se usa la misma fórmula pero ahora el número de casos posibles se sustituye por el número de repeticiones del experimento y el de casos favorables por el número de ocurrencias del resultado cuya probabilidad se desea estimar. Si la relación tiende a un valor estable al aumentar

el número de ensayos con esto estima la probabilidad siempre con una posibilidad de error. Por ejemplo puede ocurrir que en 100 lanzamientos salga es seis 15 veces. Su probabilidad sería 15/100=0,15. Si en 10.000 lanzamientos sale el seis 1672 veces es 0.1672.
El valor teórico es 1/6=0,1666... al cual se tendría que ir acercando el valor por repeticiones al aumentar estas. El límite al ir aumentando las repeticiones se debe definir de forma diferente a la forma que se hace en Cálculo Infinitesimal, pero está bien aclarado.

El problema se presenta cuando el número de casos es infinito. No se pueden dividir cantidades infinitas. Se acude entonces a la idea de medida de un conjunto.

Consideremos un segmento de longitud 1 y elijamos un punto (valor entre 0 y 1) por un método no sesgado (es decir, la probabilidad de el punto caiga en sub-segmentos cualesquiera de igual longitud es igual).

¿Cuál es la probabilidad de que el punto caiga en el intervalo (0.0,0.5)? La respuesta intuitiva es: 1/2. Esto resulta de definir la probabilidad como medida. El 1/2 resulta de dividir la medida del conjunto de los casos favorables (0.0, 0.5) por la medida del conjunto de los casos totales (0.0,1.0). La probabilidad, en la fundamentación de Kolmogorov, se basa en el concepto intuitivo, claro y bien definido de medida. Pero ¿es tal concepto de medida tan claro e intuitivo?

En primer lugar, como un punto tiene medida cero la probabilidades que elijamos un cierto valor, digamos 0.35, es nula. Es incómodo que un hecho de probabilidad nula pueda ocurrir, pues es cierto lo inverso (un hecho imposible como que salga siete en un dado tiene probabilidad nula).

Se puede ver que la probabilidad de elegir un número racional (es decir un quebrado) cualquiera es también nula, ya que los racionales son numerables (o sea que podemos ponerlos en una lista uno tras otro. Ver demostración en Apéndice 1). Entonces podemos cubrir el primero con un sub-intervalo de largo e/2, el segundo con e/4, el tercero con e/8, etc., de modo que todo el conjunto de los racionales queda cubierto con un conjunto de medida menor o igual a la suma e/2+e/4+e/8+....=e; y, como e se puede tomar arbitrariamente pequeño, la medida puede ser menor que cualquier número positivo, por lo tanto es cero.

También pueden darse ejemplos de conjuntos no numerables (como el conjunto de Cantor que tiene más puntos que los racionales) que tienen medida nula.

Pero hay más aún. Se puede construir un conjunto que no tenga medida.

La medida de un conjunto es un número real positivo que se puede asignar al mismo. Se define como aditiva, es decir la medida de la unión de conjuntos disjuntos es la suma de las medidas. Para conjuntos de números reales la medida del intervalo (a,b) es b-a, la de un punto es pues cero, y la medida no varía si trasladamos el conjunto. Se puede probar (ver Apéndice 2) que hay conjuntos que no tienen medida con tales propiedades.

Por esta razón, cuando se hace la fundamentación de la teoría de la probabilidad no se puede considerar la probabilidad asociada a un conjunto cualquiera. Es decir si elijo un punto al azar sobre el intervalo (0,1) y pregunto cual es la probabilidad de que el elegido

pertenezca a un conjunto Z dado por la construcción dada en el Apéndice 2, la respuesta es que no hay tal probabilidad. Es decir tal evento no puede considerarse aleatorio si exigimos que a todo evento aleatorio se le pueda asignar cierta probabilidad. Y por supuesto tampoco podemos decir que el hecho ocurrirá con seguridad. Es decir, el concepto de probabilidad no le es aplicable.
La Teoría de Probabilidades, que es la expresión matemática rigurosa del concepto de azar no puede asignar probabilidad a eventos que intuitivamente tienen una posibilidad de ocurrir.
Algunos lectores que lean el Apéndice 2 quedarán indiferentes por lo abstruso de la construcción de tal ente ideal sin probabilidad. Pero recordemos que muchas veces los extravíos de los matemáticos (como los espacios no euclideanos o los números imaginarios) pasan a ser modelos adecuados en las ciencias empíricas.

Pero una vez aclarada la definición matemática de probabilidad los estadísticos pueden manipular matemáticamente el azar dando lugar a la asombrosa Teoría Estadística con infinidad de aplicaciones. Pero se olvida de entender que significa el azar.

4. Azar y Física

Un interesante ejemplo del manejo de los conceptos de azar y determinismo lo ofrece la Mecánica Estadística. En la Mecánica Estadística clásica (ver por ejemplo Khinchin) se supone que los elementos con que se trata (el ejemplo típico son las moléculas de un gas) siguen estrictamente las leyes determinísticas de la Mecánica newtoniana. Son además completamente reversibles. Si viéramos en una película los movimientos de las moléculas del gas en equilibrio entrechocándose en un movimiento aparentemente desordenado nadie distinguiría si la película se pasa normalmente o al revés. Por otra parte, es prácticamente imposible calcular los movimientos de todas las partículas para un volumen macroscópico de gas. Requería resolver un sistema de unas 10^{22} ecuaciones.

Por otra parte tales volúmenes macroscópicos siguen bastante bien leyes determinísticas globales como las de Boyle y Charles. Para deducir estas leyes determinísticas de aquellas otras leyes determinísticas el físico usa un artificio muy extraño. Supone que las variables mecánicas (posiciones, velocidades) tienen valores aleatorios con ciertas distribuciones. Con ello puede deducir las leyes determinísticas macroscópicas. Pero además se explica un resultado muy notable que cae fuera del espíritu de la Mecánica Clásica. Cuando se comienzan a estudiar los fenómenos térmicos (Fourier 1822) llama la atención la aparición de fenómenos irreversibles. Si se quiere volver un sistema que se ha modificado otra vez a su estado inicial se ve que esto no ocurre espontáneamente. Si comunicamos por un conducto dos recipientes uno con gas y otro vacío las moléculas pasaran del primero al segundo hasta que se alcance un equilibrio. Si viéramos la película el proceso nada nos extrañaría. Pero si la pasan al revés sospecharíamos el truco o supondríamos que está actuando una influencia externa. Tal irreversibilidad del paso espontáneo de un estado más "ordenado" o mas "determinado" o que "se define con menos información" (todas las moléculas en un lado y vacío en el otro) al más desordenado (las moléculas moviéndose en un espacio más grande formado por los dos recipientes) y de la imposibilidad del proceso espontáneo inverso se expresa, como todos saben, por la ley de aumento de entropía (que es una medida del desorden).

Pero como lo observó Boltzman tal idea de orden y desorden tiene sólo sentido en el campo de los fenómenos aleatorios. La explicación estadística del caso de los dos recipientes es muy sencilla desde el punto de vista estadístico. Si en el primer recipiente hay una sola molécula, el fenómeno, considerado aleatorio (movimientos con igual posibilidad en cualquier sentido) es reversible. La molécula pasa al segundo recipiente y en un tiempo finito vuelve al primero. Si hay dos moléculas A y B en el primero los 4 estados posibles después de un cierto tiempo son: A y B en el primero, A y B en el segundo, A en el primero y B en el segundo, A en el segundo y B en el primero.

Cuatro casos que, con recipientes iguales, se suponen de igual probabilidad. La probabilidad de que A y B estén en el primero es pues 1/4 y, por ejemplo en una hora sucederá en tiempos que suman (con ciertas fluctuaciones) un cuarto de hora. Si hay tres moléculas se ve que la probabilidad de reversión es 1/8, si hay 4 es 1/16 y si hay 10^{22} (como en el volumen de un posillo) la probabilidad es aproximadamente $1/(2x10^{22})$ Es decir es prácticamente imposible. No es difícil demostrar con este tipo de razonamiento que aún leves diferencias porcentuales entre los contenidos de los dos recipientes son de probabilidad despreciable. Lo notable del razonamiento de Boltzman es que prueba muy sencillamente que el fenómeno es irreversible si uno se toma en serio la aleatoriedad del movimiento, lo cual parecía un simple recurso matemático para evitar resolver el gran número de ecuaciones. Más aún, es posible que, si se resolvieran estas con ciertas condiciones iniciales, el paso al equilibrio y por ello la irreversibilidad, que es una verdad empírica, no se encontraría. En particular, en el caso de una sola molécula podría ocurrir que la molécula rebotara continuamente en las dos caras opuestas de uno de los recipientes y el proceso sería irreversible. Queda pues en pie la pregunta ¿es el fenómeno real determinístico o aleatorio?

Otro aspecto del azar se presenta en la Teoría de la Relatividad. Aristóteles en su Física define el azar como el encuentro de dos líneas causales independientes. Salgo a la plaza con un cierto propósito. Me encuentro con un amigo, que también seguía su propia trayectoria de causas y propósitos. El encuentro, no previsto por ninguno de los dos puede dar origen a nuevos procesos y cambia totalmente la historia que hubiera ocurrido de no haberse dado el encuentro fortuito. Es claro que para alguien que tuviera la información completa de ambos procesos no habría tal azar. Aristóteles es perfectamente consciente de ello. Pero según la Teoría de la Relatividad tal conocimiento a veces no es posible por la finitud de la velocidad de transmisión de las señales. Un estallido de la estrella Sirio en este momento aparecería como un hecho fortuito, en el sentido de Aristóteles, dentro de nueve años. Podría producir entonces una serie de eventos en la Tierra para los cuales nos es imposible estar preparados. El azar aparece así como un resultado local absolutamente insuperable. Pero ¿lo es absolutamente? Si con la información vieja que tenemos ahora de Sirio hacemos un modelo de la estrella y concluimos que el estallido está ocurriendo ahora, el evento que ocurrirá dentro de nueve años no sería fortuito y lo que ocurre allí ahora podría estar influyendo ya mismo en medidas que se tomaran sobre la Tierra. El conocimiento o más exactamente la información, que superaría en cierto modo la velocidad finita de la luz, transformaría lo fortuito en predecible. Son las señales físicas pero no la información basada en el conocimiento la que tiene esa limitación. Si me he dejado un guante en un aeropuerto puedo saber instantáneamente, al mirar el que tengo, si el otro era izquierdo o derecho. El conocimiento puede generar información instantánea de un hecho distante sin necesidad de señal.

Pero es en la Mecánica Cuántica donde el problema del azar ha suscitado más polémicas. Según la interpretación ortodoxa la existencia del azar no puede eliminarse. De una partícula como el fotón o el electrón que se está moviendo lo que da la teoría es una función que en cada punto del espacio y el tiempo nos da la probabilidad de que allí (en ese instante y posición) la partícula pueda ser detectada. Tal función es la de una onda que se propaga. Y no pregunten en qué se soporta la onda (como las sísmicas se soportan en los materiales de la Tierra o las de sonido en el aire) porque una "onda de probabilidad" es un ente matemático que no necesita soportarse en nada. Si se pone una pantalla en el camino de tal onda para detectar o medir la posición de la partícula, la onda desaparece y la partícula aparece en algún punto sobre la pantalla donde la onda indique probabilidad no nula. La probabilidad de que aparezca en un cierto punto es igual al cuadrado del valor absoluto de la función de onda en ese punto en el momento de la interacción. La partícula que así aparece se revela por su efecto (químico, luminescente, fisiológico, etc.) que produce en el punto. Preguntar donde estaba la partícula un cierto instante antes del choque está prohibido. No tiene sentido pues la teoría no indica nada al respecto ni usa tal información.

Las predicciones de esta teoría en una enorme cantidad de procesos reales están totalmente confirmadas por la observación. Es claro que sus predicciones tienen carácter estadístico. Si se considera una sola partícula el lugar de detección no está estrictamente determinado. La partícula siguiente, supuesta en condiciones idénticas de movimiento puede ser detectada en otro punto. Si se trata de muchas partículas en las mismas condiciones el resultado muestra la distribución estadística espacial de los resultados individuales.

Cualquier persona de sentido común piensa que la teoría es incompleta. Así lo pensó Einstein toda su vida. Una larga experiencia de los investigadores muestra que cuando condiciones vistas como iguales producen resultados diferentes es porque intervienen factores ocultos que hacen que las condiciones sean diferentes, y la historia de la ciencia muestra lo correcta y fructífera que es tal hipótesis.

La discusión ha tomado dos direcciones. Por una parte se ha pretendido encontrar paradojas en la interpretación ortodoxa. Pero tales paradojas han introducido en general ideas implícitas de sentido común y otras han sido aclaradas por los defensores de la interpretación ortodoxa. No podemos entrar aquí en los detalle y remitimos al lector a la excelente presentación de Lindley. Por otra parte se han intentado otros modelos que incluyen variables ocultas. Pero en general son complicados y no aportan nuevos resultados.

Para el tema que nos interesa lo que llama la atención es la persistencia de un indeterminismo objetivo, en contra de lo que era usual en el espíritu científico del análisis del mundo objetivo.

5. Azar y Caos

Desde 1970 se ha llamado la atención sobre los fenómenos del caos determinístico (ver por ejemplo Schuster). Se observa que procesos definidos por leyes estrictamente determinísticas presentan un comportamiento que el que los observa no puede predecir. No se debe a que haya que resolver infinidad de ecuaciones. El primer ejemplo, dado por un meteorólogo (Lorenz) para describir la convección en un fluido es de tres ecuaciones.

Para entender, con un ejemplo sencillo, como puede suceder esto consideremos un péndulo rígido. Lo consideramos formado por una esfera con cierta masa fijada al extremo de una barra rígida. El péndulo puede oscilar en un plano. Su posición de equilibrio es la vertical con la masa abajo. Si le aplicamos un golpe el péndulo oscilará (puede dar antes varias vueltas completas si el golpe es fuerte) a ambos lados de su posición de equilibrio hasta que el roce en el punto de giro o el del aire amortigüen su movimiento. Pero ahora apliquemos una sucesión regular de golpes, o bien una fuerza periódica como cuando ayudamos a hamacarse a un niño en un columpio. Entonces para ciertos valores de los parámetros (masa, longitud, roce, intensidad y período de la fuerza) el movimiento se vuelve caótico. Es decir no podemos encontrar ninguna regularidad en él, a pesar de que, en el modelo simplificado, todo es estrictamente determinístico. Y nótese que es el modelo el que se comporta caóticamente, así que el caos no se debe a perturbaciones desconocidas en el mundo real.

Hay una observación que puede ayudarnos a comprender este fenómeno dentro de un modelo determinístico. En la trayectoria del péndulo hay una posición de equilibrio inestable. Es la vertical con la masa en el punto más alto y velocidad cero. En tal posición cualquier velocidad que se agregue, por pequeña que sea o, si la velocidad es cero, cualquier imperceptible desviación hacia uno de los lados, harán que el péndulo se decida descender por un lado o por el otro. Pero según el lado que tome, su comportamiento posterior será muy diferente. Y por exacta que sea una observación siempre puede haber una situación en que se conjuguen las fuerzas actuantes para que la decisión resulte impredecible. Si el péndulo está en el mundo real, no aislado, una mariposa que pase cerca de él cuando está muy próximo al punto de equilibrio inestable lo inclinará a un lado o a otro según por donde pase. Y según para donde se decida, el comportamiento siguiente del péndulo será muy diferente. Cuanto más próximo esté el péndulo a esa posición con una velocidad más próxima a cero su decisión de irse a uno o a otro lado será afectada por perturbaciones más y más pequeñas haciéndose más difícil de prever su historia. Si el péndulo puede sufrir infinitas influencias aunque estas sean muy pequeñas siempre se llegará a una posición tan próxima al equilibrio inestable que una influencia, tal vez imperceptible, lo decidirá para un lado u otro, es decir el determinismo estricto hará impredecible el proceso. Para todos los fines prácticos el comportamiento es aleatorio y si queremos saber algo de él, por ejemplo cuantas veces aparecen en un lapso dado de tiempo dos vueltas seguidas completas, debemos acudir a la observación de muchos lapsos y conformarnos con determinar su distribución de frecuencia aproximada. El hecho de que sabemos que el comportamiento básico es determinístico no nos permite predecir nada con exactitud. Estos estados del sistema en que pequeñas perturbaciones los lanzan a estados muy diferentes se llaman “puntos de bifurcación”.

Es notable que si simulamos en un computador digital el comportamiento del péndulo mediante ecuaciones diferenciales determinísticas, el caos puede también presentarse, a pesar de que el computador que calcula las ecuaciones es una máquina estrictamente determinística y no hemos introducido en el modelo acciones aleatorias externas como mariposas, brisas u otras perturbaciones del mundo real. Este caos se debe a que en el cálculo numérico de las ecuaciones que exige muchas operaciones aritméticas se introducen pequeños errores, ya que el cálculo no representa los valores exactamente (por ejemplo en una máquina que trabaje con seis cifras significativas el valor 1/3 se representará por 0.333333, mientras que el valor exacto tendría infinitas cifras y no puede representarse en el computador ni en cualquier otra forma de cálculo). Estos errores se combinan en los cálculos generando pequeñas desviaciones respecto a lo que sería un cálculo exacto. Cuando el péndulo representado en el modelo llega con velocidad casi cero a una posición muy cercana a la de equilibrio inestable, estos errores, que semejan un "ruido" prácticamente imposible de prever, hacen que en dos casos muy semejantes el péndulo simulado se iría una vez a un lado y en otra ocasión al otro. Es decir a situaciones casi iguales cercanas a los puntos de bifurcación el sistema se puede volcar hacia diferentes lados, dando a su historia un aspecto caótico. Es claro que en este caso computacional el caos es sólo aparente en el sentido que, al no haber una perturbación aleatoria como la mariposa a dos estados estrictamente iguales siempre sigue el mismo estado, pero como a estados muy próximos pueden seguir, cerca de los puntos de bifurcación, estados con historia diferente la apariencia de una parte de su trayectoria es caótica. Si repetimos el cálculo la trayectoria es la misma.

Los caos-logos han construido una diversidad inmensa de modelos muy ingeniosos y han observado cientos de casos prácticos en que las ideas de la teoría del caos se aplican. Los fenómenos meteorológicos, químicos, sísmicos, económicos y nuestra propia biografía, presentan aspectos caóticos.

Un modelo muy interesante para nuestro tema es el siguiente modelo teórico en el cual el tiempo se considera discreto (vale 1,2,3,...) y en cada valor sucesivo el sistema pasa de un estado al siguiente. El sistema consiste en un punto que se mueve sobre una circunferencia de perímetro de longitud 1. Fijamos su ley del movimiento diciendo que si está en el punto x (medido a partir de un punto origen fijo) en un instante, se moverá, en el instante siguiente al 10x medido desde el mismo origen, dando tantas vueltas como sea necesario. La circunferencia se divide en 10 partes que se numeran a partir del mismo origen: 0,1,2,3...9. La salida o valor observable del sistema es el número del intervalo en que cae el punto.

Supongamos que el punto sale de la posición inicial x=0.3473. La salida es 3, pues 0.3473 está en la parte 3 de la circunferencia. En el primer movimiento va al punto x=3.473, de modo que da 3 vueltas y queda, medido desde el origen, en 0.473, cayendo en la parte 4, la salida es pues 4.

La siguiente posición es 4.73, da 4 vueltas y la posición desde el origen es 0.73 de modo que la salida es 7. En el siguiente movimiento el avance es 7.3. La posición queda 0.3, la salida es 3. En el siguiente movimiento el avance es 3. El punto da exactamente 3 vueltas y queda en 0 y el movimiento se detiene (se repite 0 indefinidamente). Las salidas son pues 3, 4, 7, 3.

Es decir las salidas reproducen los dígitos decimales de la posición de partida. El movimiento es estrictamente determinístico.

Consideremos ahora una sucesión infinita de dígitos aleatorios (como la obtenida al sacar, con reposición, infinitas veces una ficha de una urna con diez fichas numeradas de 0 a 9). Tal sucesión numérica, precedida de un cero y un punto es un número real entre cero y uno. Si lo tomamos como posición de partida del punto de la máquina anterior, su proceso determinístico generará un número genuinamente aleatorio. Más aún (ver Chaitin) se ha demostrado que los números irracionales como π o e tienen sus dígitos con una sucesión aleatoria en el sentido de que cuado vemos una sección finita de sus cifras no hay una ley que permita calcular la cifra siguiente y tienen las propiedades que se exigen en Estadística para la aleatoriedad. Las excepciones como 0.10100100010000.... que son irracionales predecibles (es decir tienen una ley de formación) forman un conjunto de medida nula. Casi todos son impredecibles en base a los conocidos.

Pero basta poner como posición inicial el punto x en un número irracional no excepcional (casi todos) para que nuestra maquinita determinística nos genere tal sucesión aleatoria.

Este ejemplo parece contradecir la caracterización de sucesión aleatoria de Kolmogorof y Chaitin: una sucesión es aleatoria si el menor algoritmo que la genera es de mayor tamaño que la sucesión. Pero, cabe preguntar, ¿que tamaño tiene el algoritmo que genera la posición inicial irracional? Tanto si incorporamos el dato inicial al algoritmo como si lo definimos mediante la definición de Cantor o la de Dedekind, se ve que tal especificación tendría un número infinito numerable de pasos (no sería, estrictamente hablando, un algoritmo).

En el caos se vuelve a encontrar una relación entre determinismo y azar que permite generar procesos que parecen aleatorios partiendo de sistemas determinísticos (como en el caso del péndulo) o bien a partir de un proceso aleatorio (como la extracción de las fichas) dar un proceso determinístico que imite estrictamente su comportamiento.

Mencionaremos un problema en la relación del caos con la cuántica. En esta teoría, hecha para las partículas elementales y sistemas con pocos estados, con niveles de energía discretos, se supone que en circunstancias de altas energías y estados muy próximos las leyes del comportamiento descritas por la cuántica tienden a las de la mecánica clásica. Pero no parecen llevar a casos caóticos. Está difícil establecer el puente entre los sistemas descritos por la cuántica y los caóticos. Tal relación, que sería de gran importancia para ambas teorías, está siendo investigada (Ver Keating)

6. Azar y Biología.

En la idea más aceptada sobre la evolución biológica, la tesis neo-darwinista, el azar juega un papel esencial. Una exposición popular pero magistral de tal tesis puede verse en el libro de Monod o en los más actuales de Dawkins o Watson.

La idea central es que los seres vivos presentan alteraciones en sus genes por lo cual los hijos se diferencian de sus progenitores. La selección natural produce una diferencia en la tasa de reproducción que lleva a una evolución, en el sentido adaptativo, de toda la población de una especie. El proceso se complica por la relación entre especies y por las actitudes de grupos de individuos (migraciones, nuevos hábitos de vida, etc.) pero lo esencial es que las mutaciones son aleatorias y no tienen ninguna relación adaptativa con el medio.

La increíble sofisticación de las funciones vitales (asimilación, inmunización, instintos, inteligencia, relación con seres de la misma u otra especie) se forman por este mecanismo ciego. Toda idea de propósito, sentido de la vida, finalidad, quedan excluidas.
La hipótesis de la evolución así concebida no puede demostrarse, pero su poder explicativo y la sobriedad de recursos supuestos es tal que es aceptada como un axioma por prácticamente toda la comunidad científica.

Un punto difícil de explicar (ya Darwin lo había notado) es que en la formación de una función, como la visión, es necesario que concurran muchas características orgánicas al mismo tiempo, sin que parezca que cada una de por sí dé ventajas al individuo.

Si se produjeran por separado en diferentes tiempos, al no ser ventajosas (inclusive pueden ser contraproducentes) no se conservarían por selección, y por otra parte la probabilidad de que se presenten simultáneamente para así crear la función y dar ventaja al individuo, es extremadamente baja. Salet ha tratado de calcular algunas de estas probabilidades y son extraordinariamente bajas como para que aparezcan en el lapso de los 4000 millones de años en que se supone que deben haberse formado. Un cálculo semejante de Vollmer sobre la probabilidad de formación del DNA que es la base de la herencia parece dar probabilidades menores que el límite de 10^{-200} dado por Borel (algo arbitrariamente) para calificar un hecho como imposible. En estos cálculos hay de todos modos, un punto oscuro. Un hecho individual, como una cierta distribución de moléculas entre los dos recipientes descritos en 3), puede tener probabilidad muy baja. Pero lo que debe considerarse es una multitud de configuraciones diferentes muy próximas. En el caso del gas esto nos permite calcular que probabilidad tiene un rango de diferencia de presión entre ambos recipientes la cual puede ser apreciable. En el caso del DNA habría que considerar una multitud de estructuras moleculares capaces de replicarse y ver que probabilidad hay de que una cualquiera de ellas se realice. Esto exige demasiado de nuestro conocimiento e imaginación. Con todo, la impresión es que la probabilidad seguiría siendo muy baja ya que las estructuras moleculares sin esa función son muchísimas más que las que tienen esa función.

Esto arroja una sombra de sospecha sobre la exactitud o al menos la completitud de la tesis neo-darwiniana de la evolución.

La tesis alternativa, de un plan deliberado en la evolución o la intervención de un principio no material que la impulse como ha supuesto Bergson es vista con desconfianza por los biólogos como un salto más allá de lo científico, ya que tal ente puede transformarse en un principio explicador de cualquier proceso el cual sustituiría a la búsqueda científica mediante la observación de la realidad.

Lo notable es que en los textos de los biólogos, incluido el de Monod, casi nunca se discute que es el azar, del cual la teoría actual de la evolución hace tanto uso.

7. Azar y Psicología

Supongamos que un analista de sistemas decida hacer un modelo de simulación de un supermercado para mejorar el servicio con el mínimo de lugares de pago. En el modelo considerará las llegadas, el lapso de estadía por selección de artículos y la duración de la atención en la caja para cada cliente. En el modelo sigue las historias individuales de un gran número de clientes sucesivos y con el cálculo de cada etapa (realizado en un computador) calcula las colas y esperas medias. Para ello trata la duración las estadías individuales dentro del mercado y los tiempos entre llegadas como variables aleatorias. Concentrémonos en las llegadas. En el modelo, dada una llegada es necesario decidir cuando ocurrirá la próxima. Este tiempo entre llegadas es una variable aleatoria. Dada una llegada el tiempo hasta la otra no es exactamente previsible, varía con las diferentes llegadas. Para ver cómo varía, el analista se pone en la entrada y con un cronómetro mide gran cantidad de tiempos entre llegadas con lo cual obtiene una distribución de frecuencias de tiempos entre llegadas, es decir diversos valores posibles de los tiempos entre llegadas y las probabilidades de que ocurra cada valor. Esta distribución es la que se usará luego en el modelo. En otras palabras supone que, las llegadas se producen al azar. Es claro que si le preguntamos a un cliente porque llegó en ese momento no nos dirá que es por azar sino que nos dará una explicación en que incluirá hechos externos pero también muchos hechos subjetivos: percepción de necesidades, propósitos, información de rebajas, expectativas y muchos otros. El analista sabe eso pero no le interesa para su modelo. Puede hacer el cálculo sin esas consideraciones que si se trataran de incluir en el modelo lo harían inmanejable. Por otra parte con sólo sus variables aleatorias puede predecir bastante bien lo que le interesa. Por cierto, sabe que las llegadas se producen por ciertos motivos, pero ello no figura en sus datos, sabe que hay motivos sólo porque él percibe su subjetividad y la supone existente en los clientes.

Pero si el analista fuera un extraterrestre sin la menor idea de lo que son los humanos y los considerara sólo como objetos móviles, sus conclusiones no serían muy diferentes de las de los físicos cuánticos: el movimiento de estos seres sería aleatorio, pero se pueden descubrir regularidades estadísticas en su comportamiento. Si el extra-terrestre tuviera una ceguera para los móviles cuando no interactúan y sólo percibiera los seres cuando llegan a la puerta, cuando llegan a la caja y cuando llegan a la puerta de salida, la analogía con el físico que estudia las partículas sería sorprendente. Y no sería difícil que concluyera que la explicación que le da su modelo probabilístico es suficiente y completa, aplicando la navaja de algún Ockham extra-terrestre a la complicada hipótesis de que el comportamiento de los humanos se debe a una extraña y misteriosa subjetividad, teoría que, después de todo, no es verificable y no podría explicar los hechos mejor que la probabilística. La idea de la navaja de Ockham es que al explicar un proceso o hecho por otro de un nivel más complejo (como la intervención no detectada de una inteligencia superior) puede quedar éste sin explicar y además éste puede tener una capacidad de justificar muchas aplicaciones a otros enigmas lo que puede hacernos omitir el análisis de tales enigmas. No es pues un principio científico sino más bien un consejo aparentemente sano de táctica de investigación. Claro que esta táctica puede hacernos elegir erróneamente la explicación como en el caso del extra-terrestre. Es pues una navaja de dos filos.

Lo interesante es que lo que subjetivamente aparece como un proceso consciente de decisión, que como hemos supuesto en 2) no se percibe ni como aleatorio ni como determinístico, desde el exterior se ve como un proceso aleatorio. No podemos discutir mucho qué son o cómo son los procesos conscientes. La percepción y su expresión más compleja el conocimiento y la voluntad que se expresa en la acción son procesos reflexivos: puedo conocer mi conocimiento, actuar sobre mis acciones, conocer mis acciones, actuar sobre mis conocimientos y recursivamente conocer el conocimiento de mis conocimientos, etc. Este hecho ya hace a los procesos psíquicos prácticamente impredecibles.

Si a esto se agrega que la subjetividad es no espacial e inmaterial aunque está en constante interacción con el cuerpo y el mundo espacial y material, tendremos una idea de lo difícil que es desarrollar una ciencia que abarque e integre el mundo objetivo y el subjetivo. Todo esto es lo que, el analista para simplificar y el extra-terrestre por ignorancia, resumen en el (engañosamente) simple concepto de azar. Que sus modelos, hasta cierto punto, funcionen, puede indicar una profunda conexión entre el azar y lo subjetivo.

Otra visión de esta relación está en la dificultad del análisis basado en lo material, de alcanzar lo subjetivo. Imaginemos un neurólogo que tiene un conocimiento total del funcionamiento del sistema nervioso pero que, por un problema psíquico jamás ha sentido un dolor. Se le presenta un paciente que le dice que le duele una muela. Aunque el neurólogo, que jamás ha sentido un dolor no entiende que es eso, sí entiende que hay un problema en una muela. La analiza y detecta una inflamación que oprime un nervio. Sigue las conexiones del impulso nervioso y ve que este termina en una zona de la corteza cerebral. Golpea otras muelas y ve que se generan impulsos que terminan en distintas zonas adyacentes del cerebro pero que, a diferencia de la que corresponde a la muela dolorida, desaparecen al corto tiempo. La inflamación parece tener el efecto de un golpe permanente. Conoce unas sustancias químicas de las que sabe, por experiencias con pulsos nerviosos, que interrumpen las conexiones de las neuronas y las aplica a alguna de las que conectan las neuronas junto a la muela a la zona correspondiente de la corteza. El dolor se detiene por un tiempo largo. Por fin aplica un anti-inflamatorio a la muela y el dolor cesa. El paciente se va feliz y el neurólogo se queda satisfecho pues, además de su paga, se queda con la idea de que sabe todo lo que se puede saber acerca del dolor de muelas, cómo se produce, porque el paciente lo siente, cómo se puede provocar, cómo se alivia, cómo se cura y cómo manipularlo.

Sabemos que, a pesar de sus conocimientos y de muchos más que pueda agregar si sigue investigando el sistema nervioso y el cerebro, no llegará nunca a saber que entendemos por dolor de muelas y es imposible que lo entienda por más explicaciones que le demos. Puede seguir la conexión causal de cualquier acción externa sobre el cuerpo hasta llegar al cerebro pero algo que es la sensación subjetiva correspondiente no surge del análisis y queda como un fenómeno impredecible, un salto insalvable en una cadena de procesos fisiológicos entre cuyos pasos se puede eliminar cada vez más el carácter aleatorio profundizando el análisis bioquímico. Pero entre estos y la sensación subjetiva hay un salto que el análisis científico objetivo se inhibe de alcanzar. Aún si encontrara una diferencia neurológica entre él y sus pacientes, esto no le permitiría sentir el dolor. Aún si reparara en él esta deficiencia y sintiera el dolor sentiría algo que no hubiera podido predecir al notar las diferencias y además, la nueva sensación subjetiva no agregaría nada a su conocimiento científico, objetivo y manipulatorio que tenía del tema. Lo mismo pasa con el salto desde la sensación subjetiva de mi voluntad de levantar una mano hasta la serie de excitaciones de neuronas corticales que siguen a esa sensación a las cuales sigue la corriente nerviosa bien determinada y analizable que provoca la contracción muscular adecuada (Ver Eccles y Popper).

Toda nuestra ciencia se basa en el análisis de procesos objetivos y repetibles (o, por lo menos simulables) aunque, paradójicamente, avanza por procesos de descubrimiento que, en su punto esencial, son subjetivos e irrepetibles y por tanto no son objeto de la ciencia.

8. Azar y cambios estructurales.

Desde hace muchos años me ha preocupado la naturaleza de los cambios estructurales. El Enfoque de Sistemas (ver Churchman) el máximo esfuerzo que en el siglo XX ha hecho la humanidad para entender y manejar la creciente complejidad de sus problemas, concibe un sistema como una totalidad donde se integran muchos entes relacionados y con un comportamiento dinámico pero que resulta de su estructura. Los cambios dinámicos son, en general, cambios cuantitativos en las características de sus entes (variables). Así, en un sistema económico cambia el ingreso de las personas, la tasa de interés y los precios, pero las relaciones entre los componentes (personas e instituciones) permanecen más estables. Pero a veces cambia la estructura del sistema: se incorporan entes nuevos, otros desaparecen o salen del sistema, cambian radicalmente sus relaciones y sus comportamientos. Estos cambios pueden ser graduales o bruscos. Compárese la revolución inglesa, que entre el siglo XVII y el XX deshizo el régimen absolutista y formó el sistema democrático con la francesa, que hizo la transformación de un sólo golpe en unas pocas décadas a partir de 1789.

No hay dentro de la Teoría de Sistemas, conceptos y técnicas claras para entender y manejar estos cambios, tal como los que se dan para manejar la complejidad de las estructuras. Pero desde la década de los 80, en que a la complejidad del mundo se ha agregado un creciente dinamismo estructural, ha aumentado la preocupación teórica sobre el problema. Por supuesto, el problema había sido tratado por filósofos, desde Aristóteles hasta Hegel, historiadores desde San Agustín a Toynbee, científicos desde Darwin a Prigogin y Kauffman e historiadores de la ciencia como Kuhn, pero no existe hasta la fecha una teoría general. Al tratar de desarrollarla, con el objeto de crear modelos y hacer simulaciones de estos procesos nos encontramos con una dificultad esencial.

Tal como el cambio común de los valores de las variables es predecible, en el cambio estructural hay siempre algo de impredecible. El cambio de los valores de las variables se explica por la estructura. Cuando es ésta la que está en juego la predicción del cambio se hace insegura. Otra vez el espectro del azar. Esto es muy visible sobre todo en los cambios revolucionarios.

Se ven, a veces, muchas posibilidades, pero que estructura estable resultará de la crisis parece depender de factores imponderables y accidentales que llevarán a una u otra solución. Otra manera de decirlo es que en el sistema aparece un aspecto creativo. Al lado de la destrucción generalizada en las revoluciones o la obsolescencia crónica en los cambios estructurales graduales, se abren paso procesos formativos de nuevas estructuras.

Un ejemplo físico señalado por Prigogin es el de las celdas de Benard. Si en un recipiente con líquido se calienta levemente y uniformemente el fondo, al comienzo hay una conducción uniforme y gradual de calor (agitación molecular) hacia arriba. Si el gradiente de temperatura pasa cierto límite, bruscamente aparece un patrón de celdas de convección con corrientes ascendentes y descendentes. Se forma una estructura, un orden, con el consiguiente descenso local de entropía. Cómo y en qué punto se inicia el proceso que luego se propaga a todo el líquido, debe depender de acumulaciones "fortuitas" de movimientos de agitación de las moléculas. La analogía con las revoluciones políticas es notable. En la revolución francesa la muerte prematura del hábil conciliador Mirabeau, el nombramiento del joven Bonaparte para defender Tolón, el asesinato de Marat, son hechos individuales que pueden haber inclinado (como en el péndulo caótico) la dirección de los acontecimientos en una u otra dirección. Más impresionante es la trama de Lenin de pactar con el general Ludendorf (hecho sumamente improbable) para que éste lo ayudara a salir de Suiza donde estaba exilado y lo trasladara a Rusia donde fue decisivo en el triunfo comunista (ver E. Wilson 1940).

En general, parece ser que un determinismo estricto traba la posibilidad de muchos procesos. Sería muy difícil cruzar una avenida sin semáforos si los vehículos pasaran a distancias fijas cortas cada uno del siguiente. El cruce se facilita por el carácter irregular del tránsito. Es como si, por un proceder inmanente en los procesos o por selección hayan proliferado en la naturaleza los procesos aleatorios o caóticos (en el fondo puntos de bifurcación) que llevan a la diversidad y la creatividad, mientras que los deterministas conducen al orden y al estancamiento. Por supuesto que en todo cambio estructural hay mucho de determinístico como en toda creatividad (artística, científica o social) hay mucha racionalidad. Pero la evolución de las estructuras ocurre al borde del caos como la creatividad humana se mueve al borde de la locura.

9. Azar y cambios en las visiones del mundo.

El problema del azar, que aparece como una infección en tantas ramas del saber (¡y ni siquiera hemos mencionado la creación artística (ver Wagensberg), los sueños y la actividad de los agentes sociales, religiosos, económicos y políticos!) y nos ha sugerido una constante relación entre lo subjetivo y lo objetivo. Azar y sentido de la verdad de una idea, azar y libre albedrío, azar como herramienta conceptual para manejar multitudes determinísticas, azar compensado por el conocimiento, azar surgido por la observación de una partícula, azar relacionado con los objetos mentales como la medida de conjuntos y los números irracionales, azar como apariencia percibida en procesos determinísticos, azar en los fenómenos de la vida, azar como apariencia de los procesos subjetivos, azar como apariencia y como posibilitador en los cambios estructurales y creativos.

Aventuremos una hipótesis. La infección del azar en tantos campos del conocimiento y la actividad humana ¿no será la contraparte del rechazo científico de lo subjetivo? Para aclarar más este problema veamos cuales fueron las etapas que llevaron a nuestra ciencia objetivista. En alguno o en varios puntos de cambio estructural tomó la humanidad (en épocas y culturas diferentes) una serie de decisiones que llevaron, a una parte de la humanidad, a esta gloria que es el conocimiento científico y a este pantano del azar. El esquema que exponemos es, por supuesto, una extrema simplificación que no muestra la asombrosa riqueza del desarrollo de los conceptos del mundo.

La llamada “mentalidad primitiva” es integrada. El ser humano considera a los animales, plantas, objetos naturales y aún artificiales como entes iguales a él mismo. Con sus proyectos, amistades y odios. La supervivencia de esta actitud es larga. El romano que antes de entrar a su casa hacía su saludo y reconocimiento al dios Umbral o el computista que insulta y hasta golpea a su equipo cuando se queda colgado, vuelven momentáneamente a ese concepto del mundo. En algunos casos, en este animismo primigenio, se percibe la idea de un misterioso y a veces aterrador poder universal que se extiende a todo el universo, base de la vida de todos los seres (Otto).

Tal vez la reflexión sobre la muerte produce la primera dicotomía. El ser humano, según la mentalidad no científica, todos los objetos tienen una parte material y un alma, que pueden separarse. Para actuar se puede hacerlo sobre el cuerpo de los seres (actividad técnica) o sobre el alma (actividad mágica). Frazer ha descrito un impresionante cúmulo de estas creencias y actividades.

De alguna forma, relacionada tal vez con la formación de grandes comunidades, se llega a la idea de Dios, ya en germen en el animismo primitivo y en la generalización del alma.

Hay entes (luego se sintetizan en uno sólo) de tipo espiritual (aunque pueden encarnar) que dirigen todos los procesos de la naturaleza y el destino humano. A la magia le suceden los sacrificios, oraciones y otras prácticas religiosas. La naturaleza en la evolución monoteísta es des-animizada y se abre la posibilidad de una ciencia objetiva: descubrir las leyes que la legalidad divina ha impuesto al mundo creado por Dios. Pero entonces aparece la contradicción entre el libre albedrío (requerido para el premio y el castigo, base de muchas éticas religiosas) y la omnisciencia divina que puede predecir nuestras decisiones. La religión por ruptura o continuidad, evoluciona en Filosofía. Dios es des-humanizado. Es un principio mental, creador, organizador, racional (el Ser de Parménides o Hegel) del cual proceden todas las cosas. Lo subjetivo se ha objetivizado pero sin perder su esencia y rasgos subjetivos. Por último (y esto ocurre principalmente en la Europa renacentista) tal principio es eliminado. Descartes-cauteloso por el reciente juicio a Galileo- dice, hablando de un trabajo no publicado en que describe el origen material de todas las cosas: "resolví dejar este mundo de discusiones [entre los doctos, sobre el origen de este mundo] y hablar sólo de lo que podría haber ocurrido en un nuevo mundo, si Dios hubiera creado, en algún lugar imaginario del espacio, materia suficiente para formarlo". De su agitación caótica, la materia siguiendo sus propias leyes, formaría todo el orden universal. Unos ciento sesenta años después, cuando Laplace expone ante Napoleón su teoría de la formación del sistema planetario y el emperador, preocupado por un ataque a sus medios de control, le observa que no ve a Dios en su sistema, ya la ciencia atea está consolidada: "Señor-responde orgullosamente Laplace- no he tenido necesidad de esa hipótesis".

El vuelco hacia el mundo objetivo arrasa con todo. El pensamiento es una mera forma de comportarse del cerebro. Del mundo dual de Descartes, La Mettrie sólo toma el material. Los intentos unificadores de Spinoza y las advertencias de Vico son olvidadas. La ciencia aborda la descripción material de todo el universo. El éxito de la tecnología parece confirmar su verdad.

La contradicción es entre el determinismo implícito en el método científico y los problemas de azar y subjetividad antes mencionados. Todo va bien hasta comienzo del siglo XX. Aparecen las teorías "no representativas". El universo tetra-dimensional de Einstein o la trayectoria cuántica son irrepresentables. Por otra parte el azar, lo no explicado, aparece en todos lados y los procesos creativos y de cambio estructural no encuentran una teoría adecuada.

La subjetividad parece también irreducible para la ciencia objetivista. Ilustres científicos como Eccles vuelven al dualismo cartesiano, otros como Penrose se apoyan en los azarosos fenómenos cuánticos, otros en la neurología como Crick. Pero otros como Chalmers insisten en el valor e irreductibilidad de lo subjetivo.

Muchos han reivindicado el principio antrópico: las leyes naturales son tales que deben asegurar la aparición de la mente. Es una vuelta a ideas orientales o hegelianas en que se ve el desarrollo del universo como un proceso de auto-entendimiento.

O el principio cosmológico: lo que experimento desde aquí (un mundo dual integrado subjetivo y objetivo) es lo que se ve desde cualquier otro punto del universo, lo cual se parece al animismo primitivo.

Según Spinoza: el universo es una unidad con dos caras: pensamiento y extensión. Y "el orden y conexión de las cosas es idéntico al orden y conexión de las ideas" (Spinoza).

Tal vez en el futuro siglo se consolide esta visión dualista-unitaria y se vea que el azar y el determinismo son modelos parcialmente explicativos de una unidad que está más allá de ambos.
Dios, por decirlo en los términos teológicos de Einstein, no juega a los dados irresponsables ni al determinismo estéril, sino, tal vez, a una continuada creación con un orden que percibimos (imperfectamente) en la Ciencia, como azar o como determinismo.

Apéndice 1.

Numerabilidad de conjuntos infinitos

Cantor hizo frente a las paradojas del infinito que hicieron que Galileo no abordara este tema. Galileo se pregunta al discutir los métodos infinitesimales de Cavalieri, si hay más números naturales (1,2,3,4.....) que pares (2,4,6,8,...). La primera respuesta es obvia: el todo es mayor que la parte; por lo tanto hay más naturales. Pero Galileo imagina esta correspondencia:

1 2 3 4 5........ naturales
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
2 4 6 8 10......... pares

Por cada natural hay un par luego hay igual número de naturales que pares. Pero aún se puede hacer esta correspondencia indicada por las flechas:

1 2 3 4 5
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
8 12 16 20 ..... (los naturales multiplicados por 4)

La cual muestra que hay más pares que naturales pues intercalando los pares que faltan en la segunda lista:

1 2 3 4 5 naturales
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 (sobran pares)

Cantor no se atemorizó por esas paradojas y supuso que la regla de que "el todo es más que la parte" vale para conjuntos finitos pero no para infinitos. Definió la igualdad de conjuntos así:

Dos conjuntos son iguales cuando de alguna forma se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos. Es decir una correspondencia que a cada elemento del primero le corresponda uno y sólo uno del segundo y a cada elemento del segundo le corresponda uno y sólo uno del primero. Llamó $\aleph_0$ (aleph sub cero) al número infinito de los naturales: 1,2,3,4,.......

Ahora que ya podía comparar conjuntos infinitos se preguntó si podría haber infinitos más grandes que $\aleph_0$. Se ha llamado numerables a los conjuntos que de alguna manera se pueden coordinar biunívocamente con los naturales. Es decir tiene $\aleph_0$ elementos. Un conjunto A es más grande que otro B si se demuestra que no es posible establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos y hay algunos de A que no tienen correspondiente en B.

El primer resultado sorprendente es que los números racionales (quebrados) son numerables. Nótese que esto no es intuitivo. Basta notar que entre dos quebrados hay infinitos quebrados pues se puede tomar el promedio de los dos que es también un quebrado y luego el promedio de este con los extremos y así sucesivamente. Parece que debiera haber más quebrados que enteros. Para hacer la correspondencia biunívoca Cantor establece una tabla de todos los quebrados posibles:

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	....
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	....

3/1   3/2   3/3   3/4   3/5 . . . .

4/1   4/2   4/3   4/4   4/5 . . . .

. . . .

La tabla sigue hacia la derecha y hacia abajo indefinidamente. Es evidente que en esta tabla infinita están todos los quebrados posibles. El 234/2351 está en la fila 234 y la columna 2351 de la tabla. Cantor hace la correspondencia biunívoca con los naturales por diagonales sucesivas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	. . . .
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1/1	1/2	2/1	1/3	2/2	3/1	1/4	2/3	3/2	4/1	1/5	. . . .

A cada quebrado le llegará su turno de correspondencia con un natural y no es difícil hallar la fórmula que nos da para un quebrado dado a cual número natural le corresponde.

¿Habrá conjuntos infinitos más grandes que el de los naturales? Por una demostración diagonal igual a la vista se ve que un conjunto numerable de conjuntos numerables es también numerable. Pero Cantor encontró otro resultado sorprendente: los números reales son más que los naturales. Recordemos primero que todo quebrado se puede representar por una expresión decimal de número finito de cifras o una que entra en una parte periódica infinita. Por ejemplo:

3/4=0.75; 1/7=0.142857 142857 142857... 1470/31=4 7.4193548387096 74193548387096 74..

Hemos dejado un blanco al iniciar cada período. Esta periodicidad se ve considerando que al hacer la división, el resto tiene a lo más el mismo número de cifras que el divisor, de modo que después de un cierto número de restos se llegará a cero (y el cociente quedará con número finito de cifras) o se repetirá un resto anterior (y las cifras del cociente entrarán en un período).

Se ve además en Aritmética elemental que todo número decimal que repita indefinidamente un período se puede representar por un quebrado.

Pero se ve que hay números decimales como por ejemplo:

la raíz cuadrada de 2 = 1.4142135623095.....
o π =3.14159265358.....
o el decimal 0.101001000100001000001.......

que no son periódicos y tienen infinitas cifras. Todos los números expresables por decimales, periódicos o no se llaman números reales. ¿Será numerable el conjunto de los reales? Cantor demostró que no lo es. Supongamos que hubiéramos establecido una correspondencia biunívoca entre los números naturales y los reales entre 0 y 1 sea, para fijar ideas, la correspondencia dada en la tabla:

0.3333333333333.....
0.7500000000000.....
0.1011001000100.....
0.4142135623095.......
0.9090909090909.......
0.7639474545667.......

……………………….

Suponemos que en la tabla están todos los reales. Tal tabla con todos los reales existiría si y sólo si los reales fueran numerables. Se ve que cualquiera que sea la correspondencia siempre se puede construir un número real que no está en la tabla. Tomemos la diagonal 3 5 1 2 9 7….. y formemos un decimal con números diferentes por ejemplo sumándoles 1 y si es 9 poniendo cero. Se forma así el número decimal:

0.4 6 2 0 8………

Este número difiere del primero por lo menos en la primera cifra, del segundo por lo menos en la segunda,… y del n-simo por lo menos en la n-sima. No está pues en la tabla y dada cualquier correspondencia siempre podemos construir por ese método uno que no está. Luego tal correspondencia entre los naturales y los reales es imposible, aún considerando sólo los del intervalo (0,1). Es decir los reales son más que $\aleph_0$. Los puntos de un segmento o una línea se identifican con números reales, son pues un infinito no numerable. Cantor demostró que en una superficie, por ejemplo un cuadrado, hay igual número de puntos que en un lado.

En la Teoría de los Transfinitos se demuestra que dado un transfinito hay siempre otro mayor. En particular, dado un conjunto de infinitos elementos, el número de subconjuntos diferentes que se pueden formar con sus elementos es mayor que el número de elementos.

Apéndice 2.

Conjunto no medible

Tomemos un intervalo de largo 1, por ejemplo el conjunto infinito (no numerable) de puntos del segmento que va entre 0 y 1. Lo denotamos por (0,1).

Formamos un nuevo conjunto de la manera siguiente: agreguemos por la derecha cada punto del segmento todos los segmentos de longitud racional. Cada suma da un segmento y hay un número no numerable de esos segmentos y se extienden a toda la recta infinita positiva.

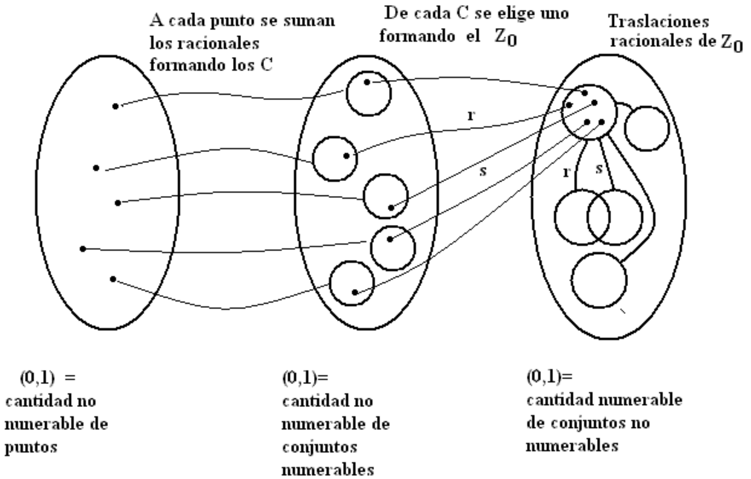
Pero hagamos un artificio para no salirnos del intervalo (0,1). Hay que transformar el conjunto expandido en uno reducido que quede en el intervalo (0,1) Si una suma se excede del segmento le restamos un largo 1 el número de veces necesario para reducirlo al intervalo (0,1). Por ejemplo si al punto 0.15 del intervalo le sumamos el racional 0.80 obtenemos el 0.15+0.80=0.95 y este quedará en el mismo intervalo [0,1], pero si le sumamos el racional 3.40 obtenemos el 0.15+3.40=3.55 que cae fuera del intervalo. Le restamos 3 veces 1 y queda 0.55 que sí esta en el intervalo y agregamos este al nuevo conjunto. Se ve enseguida que hay muchos agregados racionales que producen el mismo del nuevo conjunto. En el ejemplo el 8.40 nos produciría el mismo punto. Así que nos quedaremos siempre en el segmento. Algunos textos consideran que el segmento de largo 1 se pone como una circunferencia de largo 1 (diámetro $1/\pi$) y agrega el valor racional circularmente a partir del punto de partida. Nótese que el nuevo conjunto contiene los mismos puntos que el intervalo (0,1) pero si agregamos los racionales según la ordenación de Cantor quedarán en orden diferente. Pero se ve que si dos puntos diferían en un racional en el expandido difieren en el reducido en un racional, y análogamente si difieren en un irracional pues la transformación de uno en otro es restarle números 1. O visto de otra forma el carácter de racional o irracional depende de la parte decimal de la expresión del número. Como lo que nos interesa en la demostración es la racionalidad o irracionalidad del número y esta propiedad se conserva en la reducción trabajaremos en el intervalo reducido.

Consideremos un punto P del nuevo conjunto y llamemos C_P al conjunto generado que resulta de agregar todos los racionales al P. Es claro que si consideramos el punto P′ que difiere del P en un racional el P′ está en el mismo C_P y si consideramos el generado por P′ al agregarle todos los racionales con uno de los racionales obtendremos de nuevo el P de modo que el generado $C_{P'}$ será el mismo C_P . Nótese que este conjunto tiene tantos puntos como números racionales hay. Es decir el C_P es numerable. Se ve además que el C_P se genera a partir de cualquiera de sus puntos agregándole a ese punto todos los racionales.

Pero si consideramos un punto Q que difiere del P en un irracional vemos que Q no puede estar en C_P pues estos tienen solamente y todos los que difieren de P un racional. Más aún si generamos el C_Q vemos que ninguno de sus puntos puede estar en el C_P pues si hubiera un punto común podríamos generar desde él el C_P y el C_Q y entonces el P y el Q diferirían en un racional. Es decir, C_P y C_Q son disjuntos. Nótese que no se pueden agotar los C por un proceso finito o numerable. Pues si consideramos <u>todos</u> los C generados diferentes (es decir conjuntos que se originan de puntos que difieren unos de otros en valores irracionales) la cantidad de estos conjuntos C (cada uno es numerable) es no numerable pues si fuera numerable la totalidad de ellos tendría un numero numerable de puntos (recordad que al agregar un número numerable de conjuntos numerables resulta un conjunto numerable) y quedaría todavía una infinitud numerable de puntos.

Y mientras quedara un punto X no perteneciente a los C al generar el C_X o sería disjunto con los anteriores, con lo cual pertenecería a los C o bien tendría un punto común con uno de ellos y coincidiría con él.

Si consideramos generados todos los conjuntos C posibles disjuntos tendremos que el conjunto de los puntos de (0,1) es la unión de todos los C generados en esta forma. En la figura hemos indicado el proceso. Para mejor visualización el conjunto (0,1) de la recta se representa por un óvalo.



Como vimos en el texto la medida de un conjunto numerable es cero pero no sabemos como se suman una cantidad no numerable de conjuntos. De todas maneras la medida total es 1 pues en los C están todos los puntos del conjunto y son disjuntos.

Vamos a transformar ahora esta unión de innumerables conjuntos numerables en suma de una cantidad numerable (que sí es realizable) de conjuntos de número innumerable de puntos.

Para ello (y este es el paso aparentemente inofensivo pero riesgoso) consideremos todos los C posibles y formemos un conjunto que tiene un solo punto de cada uno de los C. Este conjunto, que llamamos Z_0 es no numerable pues la cantidad de conjuntos C es no numerable. Si le damos desplazamientos a todos los puntos de Z_0 iguales a los sucesivos números racionales obtenemos un número racional de conjuntos Z_0, Z_1 Z_2, ... iguales pero desplazados de modo que tienen medidas iguales. Tales conjuntos son disjuntos. En efecto, supongamos que el Z_r desplazado de Z_0 por el racional r y el Z_s desplazado del Z_0 por el racional s tienen un punto común y llamemos P_{dr} al punto proveniente del Z_0 por el desplazamiento racional r y sea P_{ds} el proveniente del Z_0 por el desplazamiento racional s y sea $P_{dr}= P_{ds}$ Como vienen de puntos por desplazamientos racionales los originales en Z_0 Sean P_{or} y P_{os} deben diferir en un racional que es la diferencia del r y del s. Pero como estos son elegidos cada uno de un C diferente por ejemplo respectivamente en C_R y C_S cuyos puntos difieren en irracionales la igualdad $P_{dr}= P_{ds}$ es imposible es decir Z_r y Z_s son disjuntos.

Los conjuntos Z_i si tienen medida sus medidas son iguales pues unos son desplazamiento del mismo Z_0 y suponemos que las medidas (por definición) no cambian por traslación
Supongamos que la medida sea *d* y como son disjuntos y su unión contiene todos los puntos del (0,1) la suma de las medidas debe ser 1. Es decir:

$$\sum_0^\infty d = 1$$

Pero si *d* fuera cero la suma sería 0 y si fuera diferente de cero sería infinita. Luego la igualdad anterior es imposible y por lo tanto algún paso de la demostración debe ser falso. Como todos los otros pasos de la demostración son correctos la única posibilidad de salvar la contradicción es suponer que los Z_i no tienen medida.

Bibliografía

Aristóteles: Física II-4-196a.
Bergson.: Introducción a la Metafísica.
Borel H.: Les Probabilités et la Vie. Presses Universitaires, 1971.
Chaitin G.: Information, Randomness and Incompleteness. World Scientific Publishing Co. 1987.
Crick F.H.C.: The Atonishing Hypothesis: The Scientific Search for the Soul.
Scribner, 1995
Chalmers : The Conscious Mind: In Search of a Fundamental ... - 1997
Dawkins: El gen egoísta
Descartes: Discurso del método.
Domingo C. El Cambio Estructural. UCV, 1975. Reimpresión en: Revista del Banco Central de Venezuela. Volumen XII, No.2, 1998. Pags. 51-87].
Domingo C. Tonella G. Towards a theory of structural Change. En Structural Change and Economic Dynamics. 2001
Eccles J. y Popper K.: El Yo y su Cerebro. Roche, 1980.
Frazer J.G.: The Golden Bough: A Study in Magic and Religion. Mac Millan, 1974.
Hegel G.F.W.: Ciencia de la Lógica. Trad. R. Mondolfo. Librería Hachette, 1950.
Kauffman S.: The Origin of Order. Oxford, 1993.
Keating J.: The Quantum Mechanics of Chaotic Systems (in The Nature of Chaos, T.Mullin Ed., Oxford, 1993).
Khinchin A. I.: Mathematical Foundations of Statistical Mechanics. Dover, 1949.
Kolmogorov A.N.: Foundations of the Theory of Probability. Chelsea, 1976.

Kuhn T.: The Structure of Scientific Revolutions. University of Chicago, 1972.
Julien Offray de La Mettrie: L'Homme machine. 1748. En edición bilingüe: Man a Machine. Open Court 1912.
Laplace Marquis de: A Philosophical Essay on Probability. Dover, 1976.
Lindley D.: Where does that weirdness go? Vintage, 1997.
Lucrecio Caro: De la Naturaleza de las cosas. Traducción de Lisandro Alvarado: Equinoccio, Universidad Simón Bolívar, 1982.
Monod J.: Hasard et Necesité. Editions du Soleil,1970.
Otto R.: The Idea of the Holy. Oxford University,1958.
Penrose R.: Quantum Physics and Conscious Thought. (in Quantum Implications: Essays in Honor of David Bohm. Methuen, 1987).
Prigogin I.: Order out of Chaos. New Sciences, 1984.
Salet G.: Hasard et Certitude. Editions Scientifiques Saint-Edme, 1972.
San Agustín: La Ciudad de Dios. Ed Alma Mater, 1953.
Schuster H.G.: Deterministic Chaos. VCH, 1989.
Spinoza: Etica II Prop.7.
Toynbee A.: A Study of History. Vol. I-II-III-b. Oxford University Press, 1934-1961.
Vollmert B.: La molécula y la vida. Gedisa, 1988. (Das Molekule und Leben. Rotwolt Verlag, 1985)
Wagensberg J.: Ideas Sobre la Complejidad del Mundo. Metatemas, 1994.
Watson: DNA
Edmund Wilson: To the Finland Station 1940.
West Churchman C.: The System Approach. Delta, 196